グラスマンのベクトル空間構造

信木 晴雄

京都府立医科大学医学部医学科　第二外国語教室 (非常勤講師)

Hermann Grassmann(1809-1877) は 1827 年から 1830 年にかけて Berlin 大学で言語学，哲学，神学を学んでいる．尚，数学に関しては彼の父親 Justus Grassmann の著作によって勉強をしただけである (注 1)．当時，Berlin 大学で彼に最も影響を及ぼしたと思われるのは Friedrich Schleiermacher(1768-1834) であると想定される．Schleiermacher による論理学は (弁証法 Dialektik) と呼ばれているが，これは「量に関する理論」でもあり，数学 (算術学と幾何学) とあい並ぶ知識の領域とされている．Dialektik において「空間-時間」はわれわれの認識の形式であるように事物自身の形式でもあると考えられている．これは思考するということがそれ自身によって限定されることであり，同時に思考の外にある事物に関わることでもあることを示している (注 2)．

1930 年代になって，ようやく代数学にその位置をえるようになったベクトル空間構造は最初から数学的な形式規定を備えたものとして考案されたのである．つまり，当時，Grassmann は空間の学を普遍的な形式の学の水準にまで引き上げようとしていたのである．

1　思考の形式

Grassmann に影響を与えた Dialektik には数学上の知識の本性に関する重要な思考法が見出される．それは $a = a$ という等式が表わしていることがらに含まれる 2 側面である．まず，それは思考の同一性と事物の同一性である．そして，第 2 に知識の成立条件としての形式である．この形式は数学の基礎に考えられる順序づけられたものである．即ち，これは論理的に基礎的な形式存在であり，そこから数学上の知識が導出されるものと考えられているからである．この数学的な知識は知性の純粋な論理的形式と経験的に与えられる物理的な側面とから両義的-相互補完的に，即

ち，弁証法的に成立するものである．彼は思考の働きを (組み合わせ Kombination) や (結合 Verknüpfung) によって捉えている．

そして，Grassmann は 2 つの『広延論 Ausdehnungslehre(1844)，(1862)』で，彼独自の哲学的な学問として「形式の理論 Formenlehre」を Schleiermacher による Dialektik から展開することになる (注 3)．この「普遍的な形式の学」には，抽象的な結合や産出をなす思考の形式が見出される．つまり，「拡がり」を形成する形式による産出がその最大の特徴である．それは集合とその産出形式における知識の相対的なありかたを示している．例えば，一と多や連続や分離，同一性と差異性等がそれ自身として純粋に存在するのでなく，「特定の観点によって」アスペクトとして解釈されるものとする立場である．

これはまた，実在性の本質が諸概念の定義や諸概念の間に成立する普遍的なスペチエス上の関係とする考え方でもある．特に，Grassmann は形式論理学という特定の論理学上のアスペクトを数学上の普遍的なアスペクトに「一致する」ものと見なして，これを「形式の普遍的理論」としているからである．そこで，集合，即ち，数系列は順序として総合されるさいの「産出の様式」を通じて概念的に厳密に把握されなければならない．

2 結合形式

彼が数学の知識の領域から導き出す対照的な思考の形式は 2 つある．それは連続と分離，そして同一性 (相等性) と差異性である．連続と分離の対比は，それらが同じ「流量」において対照される限りで成立するものだからである．つまり，両者は相互に互換されうる．連続も生成する個別的契機によってその結合の単一の作用が際立つ限りではそれは分離と考えられる．分離も事物がそれ自身でこれから生成してゆく契機として見なされるとき，それは自身へ結合するものとしてこれは連続を表わすのである．同一性 (相等性) と差異性の場合もこの「流量」と同じように解釈されうる．

また，数は代数的に取り扱われるさいに，分離した形式によって捉えられる．その結合 (加法) も分離した形式 (数) によるものであり，それゆえ数の体系理論は「結合的な解析 (分析)」と呼ばれる．そしてこのようにして結合するさいの分離形式をもって次の総合の操作が考えられ，これによって理論の形式には「根源の論理」として思考の法則が見出される．数学的な概念は様々な「操作の反復」によってなり

たち，それは要素を変換するさいの法則 (拡がりの形式; 線分や面分) としての形式存在を示すものである.

この法則では最も基本的な形式は「等号」であるが，これには特別の定式が与えられてはいない. 寧ろ，一方が他方に等しいことは相互に交代可能な場合に限るとされる. 即ち，何方かを代えても真理が損なわれないものが等しいものと考えられる (注 4). 次に結合に関する形式がアスペクトとして対照的に捉えられる. それは代数的に類比する総合 $\cup$ (加法) と分析 $\cap$ (減法) の結合形式である (注 5).

Grassmann による結合形式において加法に関しては (可換的 kommutativ) であり (結合的 assoziativ) である (注 6).

$$a+b=b+a\ ,\ \ a+(b+c)=(a+b)+c$$

乗法に関しては可換的であり結合的で，しかも加法について (分配的 distributiv) である.

$$ab=ba\ ,\ \ a(bc)=(ab)c\ ,\ \ a(b+c)=ab+ac$$

彼の結合形式は演算による体系をなすものである.

$(a\cap b)$ は a と b を結合したものを表わしており，( ) は概念の「統一」を示すと言われる. この結合の結果はまた別の形式によっても結合されうる. この変換の加法や減法は結合法則や分配法則にしたがう点では代数的な演算に類比するが，これはまったく形式結合を示すためのもので，任意の要素から「新しい形態」を一義的に定める規定のしかたなのである. 例えば，幾何学的な 2 つの点によって線分が新たに規定されることである. これは，後述するが，要素や単位，基底を掛け合わせて新しい段階の要素，単位を作りだすことである. この数学的算術の要素は「論理学的な観念論」に裏打ちされる関係として理解される.

この結合が c を生みだすさい，$a\cap b=c$ と表わされ，この結合には「総合的分析の過程」が捉えられるのでもある. 即ち，a を見つけるのは b と c が与えられるときであり，b を見つけるのは a と c が与えられるときなのである. この「分析過程」は 1 つの結合によって成り立つものである.

また総合的結合は $\cup$ によって示され，次の等式が成り立つ.

$$a\cup b\cup c=a\cup c\cup b=a\cup(b\cap c).$$

実は，後者の総合的結合の方が単一でより基本的な結合形式なのである. 加法と減法の両者は次の関係が成り立つ. 即ち，$a\cup(b\cup c)=a\cup b\cap c$ (注 7).

また，総合的結合からは「中和化された形式」が取り出される．それは $a \cup a$ で表わされ，次の等式も成り立つ．即ち，$a \cup a = b \cup b$．そして，$\cup a$ によって純粋な分析的形式を示す．このとき，$\cap(\cup a)$ は $\cup a$ に等しいとされる．また，$\cup(\cup a)$ は $\cap a$ に等しい (注 8)．この形式的に捉えられる結合は算術や量における実在的な加法や減法における定義を示すものではなく，結合されるものの特定の形式における「生成の様態」や「産出の様式」に依存するものと理解される．最初は出発点としての要素がある一定の変形をうけ，そこから集合が生み出されるが，それが新しい変形の項として最初の基本変化の結合によってさらに高い水準の体系や領域 (例えば高次の複素数の体系として) が産出される．

結合される要素には形式的なものと実在的なものとが含まれ，両者が弁証法的に生成結合されると考えられる．そして，第 2 段階の結合を「乗積」として $\Cap$ で表わすとき，次の分配法則が成り立つ．即ち，$(a \cap b) \Cap c) = (a \Cap c) \cup (b \Cap c)$．要素の集合的な結合形式によって成り立つ関係には変化しない側面が常に見出される (注 9)．

3 ベクトル代数

3.1 n 次元空間の生成

Grassmann はこの結合形式による思考法を介して n 次元空間を明確に規定している．それは要素としての「点の産出」によって生成されるものである．最初，点は位置をもち，1 次元の運動を通じて線を生成する．そして線は 2 次元の運動を通じて面を生成するこができる．このようにして生成的な運動の本性が「拡がりの学」を普遍的に規定することになる．そこで産出されうる幾何学的対象の形態や形式は，まさにこの要素間の運動によって分析的 (公理体系をなすため) に知ることができるからである．単一の運動によって生成する対象は (体系 System) や (領域 Gebiet) と呼ばれ，直線は第 1 段階の (スペチエス Species) と呼ばれる (注 10)．幾何学的要素としての点 e (基底) の体系は同一の種類のスカラーを示すもので，次のように捉えられる．即ち，

$$e(1\text{ 番目}) + e(2\text{ 番目}) + \cdots + e(a\text{ 番目}) = ae = a.$$

n 次元空間の生成は Grassmann によって「基底 e」によって幾何学的に規定される．それは線型的な「乗積」を通じたものである．e には幾つかの法則が当てはまる．即ち，

(1) $e_ie_k = e_ke_i$ (i, k は 1 から n まで任意に示す)

(2) $e_ie_k + e_ke_i = 0$

(3) ${e_1}^2 = {e_2}^2 = \cdots = {e_n}^2$

(4) ${e_1}^2 + {e_2}^2 + \cdots + {e_n}^2 = 0$

である.

n 段階の単位としての「基底 e」の「積」は新しいより高次の単位を生成する. これは幾何学的な操作において 2 点によって 1 つの線分が決定されることに類比するものである. (2 つの単位の積 e_ie_k は単位 e_i にはもどらない, 他方, 4 元数の積ではもとの単位の 1 次関数になるので高次の複素数の体系は別に考え出さなければならない)(注 11)

3.2 幾何学的対象の代数的加法

次に, 1 次元の運動を通じ生成する線は「最も単純な幾何学的対象」であるが, それは第 2 に「方向」という特性を受け取る. それには 2 つの点によって示される「逆向きの方向」が考えられるからである. まず, AB によって点 A から点 B への運動を表わすものとする, そして BA によって点 B から点 A への運動を表わすことにする. そして, この「大きさ」を 2 つの点における位置や「差」として, 即ち, $B - A$ によっても代数的に表わすことにする. 2 つの要素の順序が変わるとき, 符号が変わることになる. ここで, ベクトル a が次のように示される. 即ち, $a = B - A = -(A - B)$.

かくして, ベクトルは代数的に操作されることができ, 同一の直線上の任意の点によって次のような計算が可能である. 即ち,

$$(B-A)+(C-B)+\cdots+(N-M) = (N-A)\ ,\ (B-A)+(C-B)+\cdots+(A-N) = 0.$$

また, A, B ……, N による n 個の点が与えられるとき, 次のような条件を満たす点 M を見つけることが容易にできる. それは, 即ち, $(A-M)+(B-M)+\cdots+(N-M) = 0$ である. このとき, $n.M = A+B+\cdots+N$, $M = 1/n(A+B+\cdots\cdots+N)$ が成り立ち, 点 M は n 個の点の「重心」や「中心」と呼ばれる (注 12). この式は上記の点による「加法」に等しい. 即ち,

$$a = e_1 + e_2 + \cdots + e_a$$

なのである.

このとき， 直線は点による同質の「線型関数」と理解される．そこで a, a_1, a_2 をスカラーとするとき，$ae = a_1e_1 + a_2e_2$，$a = a_1 + a_2$ と考えられる．もし，$a = a_1 + a_2 = 0$ のとき，$a = a_1(e_1 - e_2) = a_2(e_2 - e_1) = 0$．この場合， 商 a_2/a_1 は -1 である．このベクトルと点による生成は第 1 段階の「大きさ」とされる．

n 次元空間では「大きさ a」は一般的には「数・スカラー α」を通じて次のように表わされる．

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

ところで,「有向線分 Strecke」e_1e_2 は 2 つの点によって限られる同一直線上の「大きさ・切片」であるが，これは「ベクトル $e_2 - e_1$」ではない． 2 つのベクトルが等しいのは，それらが方向と大きさにおいて同一の場合である．それは両者が同一直線か，あるいは平行線上にある場合である．

他方， 有向線分はそれが同一直線上の部分である場合にだけ等しいことがありうる．そこで有向線分は次のような基本的な法則をもち，それによって力学上の力を幾何学的に表わすことができるのである (注 13)．即ち，

$$e_1e_1 = 0\ ,\ \ e_1e_2 = -e_2e_1.$$

3.3 「外積」の意味

2 つの第 1 段階の大きさの「乗積.」は次のようにしてより高次の段階で表わされる．即ち， $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ，$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ のとき，

$$ab = \alpha_1\beta_1.e_1e_1 + \alpha_1\beta_2.e_1e_2 + \alpha_2\beta_1.e_2e_1 + \alpha_2\beta_2.e_2e_2$$

である．

後に， Josiah Willard Gibbs は『ベクトル解析 Vector Analysis (1881-1884)』で，この形式を「歪 skew」と呼んでいる (注 14).

Grassmanns 自身はこの「積算」を「外積 (. や [ ] で示される)」と呼んでいるが，その理由は 2 つの大きさの「積」が 0 にならない場合は,「積」の要素の一方が他方の「外にある」場合に限られるからである．また， $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ，$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ のとき，

$$\begin{aligned} ab &= \alpha_1\beta_1.e_1e_1 + \alpha_2\beta_1.e_2e_1 + \alpha_3\beta_1.e_3e_1 \\ &+ \alpha_1\beta_2.e_1e_2 + \alpha_2\beta_2.e_2e_2 + \alpha_3\beta_2.e_3e_2 \end{aligned}$$

$$+ \quad \alpha_1\beta_3.e_1e_3 + \alpha_2\beta_3.e_2e_3 + \alpha_3\beta_3.e_3e_3$$

である (注 15).

3.4 「内積」の基本法則

他方，通常の代数的な「積」として $e_1e_2 = 1$ の場合，2 つの要素としての点はあい反するものとして捉えられる．$e_1 = 1/e_2$ として記される．そして「外積」の場合，$e_1e_2 = 1$ のとき，両者は入れ換えることはできない，2 番目の要素 (因子) は最初の要素の「補足・補完 Ergänzung」と呼ばれ，これはまた i=√-1 に似た働きをする代数的記号「|」によって示される (注 16).

$$e_2 = |e_1.$$

また，$e_1e_2 = 1 = -e_2e_1$ であるので，

$$-e_1 = |e_2.$$

このとき $e_2 = |e_1$ を代入すると，$-e_1 = |e_2 = ||e_1$ である．(大きさの「補足の補足 ||」は「もとの大きさ」にもどるものとする)

また，$e_1|e_1 = 1$，$e_2|e_2 = 1$

これは「内積」と呼ばれ，$|e_2 = -e_1$，$|e_1 = e_2$ なので，

$$e_1|e_2 = -e_1e_1 = 0\ ,\ \ e_2|e_1 = e_2e_2 = 0$$

となり次の法則が成り立つ．

即ち，

$$e_1|e_2 = 0\ ,\ \ e_1|e_1 = 1.$$

したがって，この「内積」が 0 にならないのは要素 (因子) どうしが一致するときに限られる．

また，第 1 段階の大きさ $a = a_1e_1 + a_2e_2$ によって，この「内積 $|a$」を表わすと次のように示される．

$$|a = a_1|e_1 + a_2|e_2 = a_1e_2 - a_2e_1.$$

２つの第１段階の大きさ，$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$，　$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2$ のとき,「内積 $a|b$」は次のように示される (注 17).

$$a|b=(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)(\beta_1e_2-\beta_2e_1)=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)e_1e_2=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$$

である．同様にして，

$$a|a={\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2$$

である．

さらに，$e_1e_2=1$ のとき，この有向線分は同一線上のものと考えられるが，第３段階の大きさ (立体) として同一平面上の切片 $e_1e_2e_3=1$ を想定することができる.「外積」において最初の要素 (因子) e_1 は次のもの e_2e_3 によって「補足」されるものであるから，次のような「内積 | 」がなりたつ．$e_2e_3=|e_1$(これはふつう代数で $ab=1$ は $a=1/b$ であることに等しい) 以下同様にして，

$e_2e_3=|\,e_1$　(なぜならば e_1 かける e_2e_3 は 1 であるから)
$e_3e_1=|\,e_2$　(なぜならば e_2 かける e_3e_1 は 1 であるから)
$e_1e_2=|\,e_3$　(なぜならば e_3 かける e_1e_2 は 1 であるから)

これは，また次のように表わされる．

$e_1=|\,e_2e_3$　(なぜならば e_2e_3v かける e_1 は 1 であるから)
$e_2=|\,e_3e_1$　(なぜならば e_3e_1 かける e_2 は 1 であるから)
$e_3=|\,e_1e_2$　(なぜならば e_1e_2 かける e_3 は 1 であるから)

そして，$e_1e_2e_3.1=e_1e_2e_3=1$ なので，

$$1=|\,e_1e_2e_3$$

また，$1.e_1e_2e_3=1$ なので，

$$e_1e_2e_3=1$$

がなりたち，次の「面の体系」の法則が３つの要素・因子によって示される．即ち，

$$|\,e_1=\|\,e_2e_3=e_2e_3$$

(この法則は「線の体系」におけるものとは異なる，$e_1e_2=1$，$e_2=|\,e_1$，$\|\,e_1=-e_1$)
このとき，同一平面上の２つの有向線分 (e_1e_2 と e_2e_3) の「積」が次のように示される．即ち，

$$e_1e_2.e_2e_3=|\,e_3.|\,e_1$$

(これは代数で $a.b = 1/\{(1/a).(1/b)\}$ と示すことに類比するものである) そこでこの関係は一般的に次のように表わされる．即ち，

$$a.b = |\,(|\,a.|\,b).$$

そして， $e_1e_2e_3 = 1$ なので，

$$e_1e_2.e_2e_3 = |\,e_3.|\,e_1 = |\,(|\,e_1e_2.|\,e_2e_3) = |\,(e_3.e_1) = |\,e_3e_1 = e_2$$

したがって，

$$e_1e_2.e_2e_3 = e_1e_2e_3.e_2$$

このようにして，同一平面上の 2 つの有向線分による「積」は次のように示される．即ち，

$$e_3e_1.e_1e_2 = e_1e_2e_3.e_1, \quad e_1e_2.e_2e_3 = e_1e_2e_3.e_2, \quad e_2e_3.e_3e_1 = e_1e_2e_3.e_3$$

この 3 つの等式の両辺をかけるとき，

$$(e_2e_3.e_3e_1.e_1e_2)^2 = (e_1e_2e_3)^4$$

つまり，

$$e_2e_3.e_3e_1.e_1e_2 = (e_1e_2e_3)^2$$

がえられる．

この等式が意味していることは，三角形を形成する 3 つの有向線分による「積」はこの三角形の倍の四辺形に等しいということであり，それは 3 つの線分 e_2e_3，e_3e_1，e_1e_2 が同じ点を通過する場合におこり，そのとき三角形の領域が 0 になり，したがって「積」が消滅するときなのである．そこで， 上記の 3 つの有向線分が同一の点を通ることは次の式で示される．

$$e_2e_3.e_3e_1.e_1e_2 = 0$$

また， 第 1 段階の大きさ ($a = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$) を普遍的に「内積」に適用すると， 次のようになる．

$$|\,a = \alpha_1|\,e_1 + \alpha_2|\,e_2 + \alpha_3|\,e_3$$

4 幾何学的対象

Grassmann はつねに論理的な範型 (ユークリッドによる演繹的導出の体系) を念頭においており，形式の学という量規定においてもその論理的観点 (根源の論理学) を維持していたと考えられる．全体と部分や一と多の関係は，このようにして論理的な根源の概念へ還元されることになる．例えば，ベクトル代数で有向線分は力で置き換えられ，即ち，演算によって幾何学的命題は力学的命題に置き換えられることが可能なのである．

平面は第3段階の「大きさ」の体系をなす．この平面は直線の単一な運動によって生成されるもの (有向面分 Plangrösse) である (注 18)．例えば，直線は位置を変えるとき，平行移動がおこり，また，方向を変えるときには回転が生じ，位置と方向が変移すると，捩じれが生じる．直線には2つの点によって逆向きのものが考えられるように，平面においても，2つの運動方向によって「逆向きの両側面」が捉えられる．例えば，回転には時計回りと反時計回りがあい対応してあるようにである．

また，平面を生成する運動の主要な特徴は，その単一性なのである．ところで，A, B, C と X を同一平面上の点とみなし，これが次の関係をみたすとき，$\alpha+\beta+\gamma=1$ のとき，$X=\alpha A+\beta B+\gamma C$ とする，このとき，直線 CX が C' において直線 AB とであうとき，C' は次のように表わされる．

$$C' = \alpha' A + \beta' B \qquad (\text{尚，} \alpha' + \beta' = 1 \text{ である})$$

そこで，点 X は C と C' によって次のように示される，即ち，

$$X = \gamma' C' + \gamma C \qquad (\text{尚，} \gamma' C' + \gamma C = 1 \text{ である})$$

そこで，以上を代入すると，

$$X = \alpha'\gamma' A + \beta'\gamma' B + \gamma C.$$

(尚，$\alpha'\gamma' + \beta'\gamma' + \gamma = \alpha' - \alpha'\gamma + \beta' - \beta'\gamma + \gamma = 1 - \gamma + \gamma = 1$)
かくして，$X=\alpha A+\beta B+\gamma C$ のとき，この点 X をみつけるためには，点 A にかけあわせることによって，次のようにベクトルの形 (自由ベクトル，自由有向線分) にして考察する方法がある．

$$AX = \beta AB + \gamma AC$$

これは,

$$A(X-A)=\beta A(B-A)+\gamma A(C-A)$$

とかかれ, 即ち,

$$(X-A)=\beta(B-A)+\gamma(C-A)$$

となる.

5 むすび

以上, 見てきたように, Grassmann の公理体系は算術や演算の操作によって成り立つ. それは生成の形式が無矛盾によって規定されることや連続にむすびつくからである. 算術の公理には, 代数的公理 (可逆性; $m+n=n+m$) と大きさの公理 ($<, >, =$) による 2 種類が考えられる. この Grassmann の代数には群構造が捉えられるが, 加法と乗法 (積算) による形式規則が見出される (注 19).
即ち,

$$a+0=0+a=a\ ,\ \ 1.a=a.1=a$$

かくて, 「Grassmann 代数」には幾何学的問題を代数によって扱う方法が備わっていることが理解されるであろう. ベクトルによる演算は幾何学的対象を計算することが可能になる「普遍的な記号法」を用いているからである. 空間上の任意の 2 点は運動によって結合され, これは平行移動として捉えられる. この運動の合成 (加法) によって「群」が造られる. この運動は 1 つの点から連続的に移行する, そして, 点列の反復操作を通じて, いわば「直線の骨組み」を生成することができるからである (注 20). Grassmann のベクトル空間には, このようにして理解される産出構造が備わっているが, 同時代, Bernhard Riemann (1826-1866) による n 次元多様体, 即ち, n 重の連続的な拡がりの概念には, この群構造が欠けており, それによってかえって多様体の大域的な振る舞いに関して, 着想豊かな規定性をえることができたとされる (注 21). そして, Grassmann においては, この平行線分の運動や移行による幾何学の公理構造は, 点とベクトル (2 次元線型点多様体) から生成する. この構造は線型代数の演算を通じて捉えられ, それによって, ユークリッド幾何学の体系よりもはるかに均質な構造によって理解されるものである.

(注)

(注 1) Vgl. Justus Grassmann, Raumlehre, Berlin, 1824. Justus Grassmann, Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre, Stettin, 1829. Justus Grassmann, Trigonometrie, Berlin, 1835.

(注 2) Albert C. Lewis, H.Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, Annals of Science 34, 1977, pp.103-162.

(注 3) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, in; Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke, hrsg.v.Friedlich Engel, Leipzig, 1894 -1911.Vgl.Friedrich Schleiermachers sämmtliche Werke, Berlin, 1839. Victor Schlegel, Hermann Grassmann. Sein Leben und seien Werke, Leipzig, 1874.Ernst Cassirer, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Berlin, 1910. エルンスト・カッシーラー, 実体概念と関数概念, 山本義隆訳, みすず書房, 1979 年, 109-113 頁参照.

(注 4) Hermann Grassmann, A New Branch of Mathematics The Ausdehnungslehre of 1844, translated by Lloyd C. Kannenberg, Illinois, 1995, S.33.

(注 5) Hermann Grassmann, A New Branch of Mathematics The Ausdehnungslehre of 1844, translated by Lloyd C. Kannenberg, Illinois, 1995, S.34.

(注 6) Hermann Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig, 1867, S.125.

(注 7) Hermann Grassmann, A New Branch of Mathematics The Ausdehnungslehre of 1844, translated by Lloyd C. Kannenberg, Illinois, 1995, S.34-36.

(注 8) Hermann Grassmann, A New Branch of Mathematics The Ausdehnungslehre of 1844, translated by Lloyd C. Kannenberg, Illinois, 1995, S.38.

(注 9) Michael J. Crowe, A History of Vector Analysis, New York, 1967, S.67.

(注 10) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, Leipzig, 1896, S.11-13.

(注 11) Hermann Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig, 1867, S.140.

(注 12) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, Leipzig, 1896, S.399-400. Vgl.Alexander Ziwet, A Brief Account of H.Grassmann's Geometrical Theories, Annals of Mathematics Vol Ⅱ. No.1, 1885, p.7.

(注 13) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, Leipzig, 1896, S.37.

(注 14) Michael J.Crowe, A History of Vector Analysis, New York, 1967, S.152-155.
(注 15) B. L. van der Waerden, A History of Algebra, New York, 1985, ファン・デル・ヴェルデン, 代数学の歴史, 加藤明史訳, 現代数学社, 1994 年, 291-194 頁参照. Vgl.Banesh Hoffmann, About Vectors, New York, 1966, S.109.
(注 16) Hermann Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig, 1867, S.108. Vgl. David Eugene Smith, A Source Book in Mathematics, New York, 1959, S.684-696.
(注 17) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, Leipzig, 1896, S.61-67.
(注 18) Hermann Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1862, Leipzig, 1896, S.186-187.
(注 19) Hermann Grassmann, Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik, Berlin, 1861, S.298-299, 303, 313, 315.
(注 20) Hermann Weyl, Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1950, ヘルマン・ワイル, 数学と自然科学の哲学, 菅原正夫・下村寅太郎・森繁雄訳、岩波書店、1959 年, 76-77 頁参照. 彌永昌吉・布川正巳編, 代数学, 岩波書店, 1968 年, 170-176 頁参照.
(注 21) Erhard Scholz, Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré, Boston/Basel/Stuttgart, 1980, S.37.