離散フーリエ変換 と MR I

八 木 克 巳

京都府立医科大学医学部医学科　数学教室

概 要

ここでは，離散フーリエ変換 (DFT) を解説し，その応用として MRI (Magnetic Resonance Imaging) の原理を解説したい．MRI の解説本は世にたくさんあるがフーリエ解析がどのように使われているのかという部分の解説は曖昧なものが多く，その部分を簡明に述べる．付録では，DFT と通常のフーリエ級数との関係の解説を与えた．

1　離散フーリエ変換

正の整数 N を 1 つ決めておき，複素数 $\zeta \in \boldsymbol{C}$ を

$$\zeta = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

とする．このとき，整数 m に対して，次が成り立つ：

$$\sum_{j=1}^{N} \zeta^{mj} = \begin{cases} N & (\ m \equiv 0 \ (\mathrm{mod} N)\ ) \\ 0 & (\ \text{otherwise}\ ) \end{cases}$$

実際，

$$(1-\zeta^m)\sum_{j=1}^{N} \zeta^{mj} = \zeta^m(1-\zeta^{mN}) = 0$$

N 項複素数タテベクトルのつくるベクトル空間を $\boldsymbol{C}^N$ とし，タテベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_N \in \boldsymbol{C}^N$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= {}^t(\zeta,\ \zeta^2,\ \cdots,\ \zeta^{N-1},\ 1) \\
\boldsymbol{e}_2 &= {}^t(\zeta^2,\ \zeta^4,\ \cdots,\ \zeta^{(N-1)2},\ 1) \\
&\ \vdots \\
\boldsymbol{e}_{N-1} &= {}^t(\zeta^{N-1},\ \zeta^{2(N-1)},\ \cdots,\ \zeta^{(N-1)(N-1)},\ 1) \\
\boldsymbol{e}_N &= {}^t(1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1)
\end{aligned}$$

すなわち，$1 \leq k \leq N$ について，

$$e_k = {}^t(\zeta^k,\ \zeta^{2k},\ \cdots,\ \zeta^{Nk})$$

とする．このとき，ベクトル e_1，$\cdots$，e_N は C^N の基底であり，互いに直交する．さらに，次のようにして N 次正方行列 $\mathcal{F}_N$ を次で定める：

$$\mathcal{F}_N = (e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_N) = \begin{pmatrix} \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{N-1} & 1 \\ \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{2(N-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \zeta^{N-1} & \zeta^{2(N-1)} & \cdots & \zeta^{(N-1)(N-1)} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，次が成り立つ：

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}_N\overline{\mathcal{F}}_N = I$$

すなわち，

$$\mathcal{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}}_N$$

このことより，

$z = {}^t(z_1,\ z_2,,\ \cdots,\ z_N)$, $w = {}^t(w_1,\ w_2,,\ \cdots,\ w_N) \in C^N$ に対して，

$$z = \mathcal{F}_N w \iff w = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}}_N z$$

が成り立つ．すなわち，

$$z_k = \sum_{j=1}^{N} \zeta^{kj} w_j \quad (1 \leq k \leq N) \iff w_j = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \zeta^{-kj} z_k \quad (1 \leq j \leq N)$$

が成り立つ．通常のフーリエ変換との対比から言えば，$z \in C^N$ に対して，

$$\frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}}_N z$$

が z の DFT（の像）で，

$$\mathcal{F}_N z$$

が z の 逆DFT（の像）である．

2 座標系

断層影像を撮りたい被写体に次のように xyz 直交座標系を導入する．
撮りたい被写体のスライスと直交する方向に z 軸をとる．$|z| \leq w/2$ が撮りたいスライスであるようにする．xyz 座標系が右手系であるように，$z = 0$ の平面上に x 軸，y 軸をとる．目標のスライスにおいて，$|x| \leq L_x/2$，$|y| \leq L_y/2$ が対象となる範囲とする．すなわち，L_x, L_y がそれぞれ x 方向，y 方向の FOV(field of view) である．
$z = 0$ の平面上において，この長方形領域を，x 方向に N_x 等分に分割し，y 方向に N_y 等分に分割する．このとき，x 方向の左から p 番目で，y 方向の下から q 番目の微小長方形の領域を場所 (p, q) の微小領域とよぶ．ここで，

$$p = 1, 2, \cdots, N_x \ , \quad q = 1, 2, \cdots, N_y$$

また，p', q' を次で定める：

$$p' = p - N_x/2 \ , \quad q' = q - N_y/2$$

このとき，場所 (p, q) の右上隅の点の (x, y) 座標を場所 (p, q) の微小長方形の (x, y) 座標とよび，次で与えられる：

$$(p' L_x/N_x \ , \ q' L_y/N_y)$$

すなわち，場所 (p, q) の微小長方形は

$$(p' - 1)L_x/N_x \leq x \leq p' L_x/N_x \ , \quad (q' - 1)L_y/N_y \leq y \leq q' L_y/N_y$$

で与えられる．
また，N_x, N_y は 2 の累乗であるようにとる．とくに，$N_x, N_x/2, N_y, N_y/2$ はすべて偶数である．
例えば，$L_x = L_y = 50\text{cm}$, $N_x = N_y = 256$, $w = 1\text{cm}$ などがある．

3 ベクトルの回転

xy 平面上のベクトルは次の対応により，複素数で表現される：

$$\text{ベクトル } (M_x, \ M_y) \longleftrightarrow \text{複素数 } M_x + iM_y$$

とくに，単位ベクトルでは，

$$\text{単位ベクトル}\ (\cos\theta,\ \sin\theta) \longleftrightarrow \text{複素数}\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

また，単位ベクトルがその始点を中心に回転（時計回りに）し，その角周波数が ω で，$t=0$ のときの偏角が c のとき，その回転の様子は次の複素数で表示される：

$$e^{i(c-\omega t)}$$

4 強い静磁場

NMR (Nuclear Magnetic Resonance, 核磁気共鳴) の現象を理解する上では，1つ1つの水素原子核は小さな棒磁石であると見なされる．人体の微小な領域を考えると，その中には沢山の水素原子核があるであろう．水素原子核のつくる1つ1つの棒磁石は勝手気ままな方向を向いていて，微小領域では棒磁石は互いに打ち消しあい，微小領域での棒磁石は 0 である．
しかし，人体が強い静磁場の中にあるとき，微小領域内の棒磁石と見なした水素原子核は多少一定の方向（強い静磁場と同じ向きで平行）を向く傾向にある．地磁気の下でコンパスの磁針が北を指すのに似ている．すなわち，強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ (単位：T(テスラ)) の下では，微小領域も1つの微小棒磁石と思える．このとき，場所 (p,q) の微小領域の微小棒磁石（磁気双極子）をベクトル $\boldsymbol{M(p,q)}$（その強さ：$M(p,q)$）で表す．以下では，強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ の方向を正の z 軸ととる．すなわち，静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ の下では，場所 (p,q) での棒磁石 $\boldsymbol{M(p,q)}$ も正の z 軸方向に向いている．場所 (p,q) の微小領域の微小棒磁石の強さ $M(p,q)$ が水素原子の密度と比例すると考えられる．MRI の目標は，$\{M(p,q)\}$ を求めることである．それを求めることにより，水素原子核の分布が分かり，人体の断層画像が得られる．

5 NMR

静磁場 $\boldsymbol{B}$（強さ：B）の下で，微小領域の水素原子核の微小棒磁石（磁気双極子）に対して，次で定められる角周波数 ω (単位：radian·Hz) をラーモア (Lamor) の共鳴角周波数という：

$$\omega = \gamma B$$

ただし，γ の単位は radian·Hz/T で，水素原子核の場合は 42.6 $\times 2\pi$ radian·MHz/T である．
静磁場（強さ：B）の下で，微小領域の微小棒磁石が上の式で定められる共鳴角周波数 ω の電磁波（ラジオ波 (RF)，強さ B_1）を横から受けると共鳴現象を起こす．すなわち，微小領域の棒磁石 $\boldsymbol{M}(p,q)$ は正の z 軸のまわりを，正の z 軸から見て時計回りに回転（共鳴角周波数 ω で）しつつ，徐々に xy 平面に倒れていく．正しくは，t 時間後，棒磁石 $\boldsymbol{M}(p,q)$ と正の z 軸のなす角は次のように変化する：

$$\gamma B_1 t$$

正の z 軸のなす角がちょうど α になるのに要する時間を τ_α と表すと，

$$\alpha = \gamma B_1 \tau_\alpha$$

が成り立つ．このときの強さ B_1 の RF と時間 τ_α の組を α-パルスという．とくに重要なのは，$\pi/2$-パルスの RF である．
この現象を NMR（核磁気共鳴）という．

6 傾斜磁気

静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ は一定の強さ B_0 (単位：T) で正の z 軸方向に向かっている．
これ以外に，次の 3 種類の傾斜磁気がある．それらは同時に掛けられることはない．
「第 1 期」…「第 3 期」や「第 k 次」については，次節に説明がある．

z 方向の傾斜磁場

z 軸方向の傾斜磁場 G_z (単位:T/m) とは，$z=z$ (単位:m) での，磁場が $(0,0,G_z z)$ となる磁場を意味する．ゆえに，強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と傾斜磁場 G_z が働いているとき，点 (x,y,z) での磁場は

$$(0,0,B_0+G_z z)$$

である．断層撮影のスライスの選択を目的として，観測において各次の第 1 期に働く．

y 方向の傾斜磁場

y 軸方向の傾斜磁場 G_y (単位：T/m) とは，第 k 次 $(k=1,2,\cdots,N_y)$ の観測において，$y=y$ (単位：m) での，磁場が

$$(0,0,k'(G_y/(N_y/2))y)$$

となる磁場を意味する．ここで，$k'=k-N_y/2$ である．すなわち，y 方向の傾斜磁場の最大値は G_y である．ゆえに，強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と傾斜磁場 G_y が働いているとき，点 (x,y,z) での磁場は

$$(0,0,B_0+k'(G_y/(N_y/2))y)$$

である．
断層撮影のスライスの y 軸方向のデータを得るのを目的とし，各次の第 2 期に働く．

x 方向の傾斜磁場

x 軸方向の傾斜磁場 G_x (単位：T/m) とは，$x=x$ (単位：m) での，磁場が $(0,0,G_x x)$ となる磁場を意味する．ゆえに，強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と傾斜磁場 G_x が働いているとき，点 (x,y,z) での磁場は

$$(0,0,B_0+G_x x)$$

である．断層撮影のスライスの x 軸方向のデータを得るのを目的とし，各次の第 3 期に働く．

7 パルス・シーケンス

正の z 方向の強い静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ の下で，RF 及び傾斜磁場は次のようなタイミングで被写体に掛けられる．
次に述べる第 1 期，第 2 期，第 3 期からなる一連の操作を 1 つのセットとして，それを N_y 回繰り返す．第 k 回目のセットを「第 k 次」とよぶ．1 つのセットにかかる時間を TR(time of repetition) とし，$0<a<b<c<TR$ とする．このとき，

$$a_k=(k-1)TR+a\ ,\quad b_k=(k-1)TR+b\ ,\quad c_k=(k-1)TR+c$$
$$T_x=c-b\ ,\quad T_y=b-a$$

とする．
次は,「第 k 次」($k=1,2,\cdots N_y$) での操作である：

第 k 次の第 1 期 $(k-1)TR \le t \le a_k$: RF と z-傾斜磁場 G_z.

第 k 次の第 2 期 $a_k \le t \le b_k$: y-傾斜磁場 $k'(G_y/(N_y/2))$.

第 k 次の第 3 期 $b_k \le t \le c_k$: x-傾斜磁場 G_x の下で N_x 個の sampling.

第 k 次の第 4 期 $c_k \le t \le kTR$: この間に，励起した微小棒磁石は緩和し，初期の xy 平面に垂直な状態に戻る．

(例えば，$a=1.5$ (msec), $b=2.5$ (msec), $c=8$ (msec), $TR=100$ (msec))
これらの効果及び意味を説明する．

第 k 次の第 1 期

(第 1 次から第 N_y 次まで内容は同一である.)
ここで，z-傾斜磁場 G_z (単位：T/m) の下で，$|z| \le w/2$ (単位：m) のスライスを選択的に励起させることを考える．このスライスでの磁場の強さの幅は，

$$B_0 \pm G_z w/2$$

である．このとき，共鳴条件より，共鳴角周波数の幅は

$$\gamma(B_0 \pm G_z w/2)$$

である．ただし，$\gamma = 42 \times 2\pi$(radian·MHz/T) である．いま，これらの角周波数を一様に含むラジオ波 (RF) を与える．このとき，スライス $|z| \le w/2$ 内の水素原子核のみが核磁気共鳴現象を起こす．すなわち，このスライスの各微小領域の微小磁石が xy 平面に倒れていく．
状況を単純化し，スライスの厚さは十分に薄いとする．すわわち，NMR の現象が起きているのは，平面 $z=0$ のみと考える．
$(k-1)TR \le t \le a_k$ 内で，静磁場 ($\boldsymbol{B}_0$ と傾斜磁場 G_z) の下で，$\pi/2(=90^\circ)$-パルスの RF (角周波数：ω_0) を掛ける．すなわち，$t=a_k$ の時点では，各微小領域の棒磁石は xy 平面上を回転している．また，RF と傾斜磁場 G_z は同時に終了する．
$t=a_k$ の後でも，一度 xy 平面に倒れた微小棒磁石は，しばらくの間 xy 平面上での

回転を持続する．$t = a_k$ の直後では掛かっている磁場は静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ のみであり，xy 平面上の各微小棒磁石は 全て同じ位相 でかつ 同じ回転速度（角周波数：$\omega_0 = \gamma B_0$）で回転している．すなわち，$t = a_k$ の直後では，各場所の微小棒磁石の回転はすべて

$$e^{i(c-\omega_0(t-a_k))}$$

で与えられる．すなわち，すべて同一の方向を向き同一の角速度で回転している．ただし，c は $t = a_k$ のときの偏角である．

第 k 次の第 2 期

第 k 次の第 2 期 $a_k \le t \le b_k$ での操作を考える．この間は，静磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と y-傾斜磁場 $k'(G_y/(N_y/2))$ (単位 : T/m) が $T_y = b_k - a_k$(単位 : sec) の間のみ掛けられる．ここでの傾斜磁場の強さは第 1 次から第 N_y 次までの間に徐々に傾斜が強くなっている．何次の第 2 期であるかに寄る．$(k = 1, 2, \cdots, N_y,\ k' = k - N_y/2)$
場所 (p, q) の y 座標は $q'(L_y/N_y)$ であるから，そこでの静磁場の強さは

$$B_0 + k'(G_y/(N_y/2))(q'(L_y/N_y))$$

である．すなわち，この強さは q と k に寄る．その共鳴角周波数を $\omega_y(q, k)$ とすると，

$$\omega_y(q, k) = \gamma(B_0 + (2G_yL_y/N_y^2)k'q') = \omega_0 + \gamma(2G_yL_y/N_y^2)k'q'$$

ゆえに，$t = b_k$ での場所 (p, q) の微小棒磁石の位置は

$$e^{i(c-\omega_y(q,k)T_y)} = e^{i(C-\gamma(2G_yL_yT_y/N_y^2)k'q')}$$

である．ただし，$C = c - \omega_0 T_y$ とする．すなわち，第 k 次の第 2 期の終了時 $t = b_k$ では，各微小領域の棒磁石の向いている方向は q と k に寄る．

第 k 次の第 3 期

（第 1 次から第 N_y 次まで内容は同一である.）
第 k 次の第 3 期 $b_k \le t \le c_k$ では，x 軸方向の傾斜磁場 G_x(単位 : T/m) を掛ける．このとき，場所 (p, q) での静磁場の強さは

$$B_0 + G_x p'(L_x/N_x)$$

である．ゆえに，ここでの共鳴角周波数を $\omega_x(p)$ とすると，

$$\omega_x(p) = \gamma(B_0 + G_x p'(L_x/N_x)) = \omega_0 + \gamma(G_x L_x/N_x)p'$$

である．ゆえに，場所 (p,q)，時刻 t $(b_k \le t \le c_k)$ での微小棒磁石の xy 平面での回転の様子は次で与えられる：

$$e^{i(C-\gamma(2G_yL_yT_y/N_y^2)k'q'-(\omega_0+\gamma(G_xL_x/N_x)p')(t-b_k))}$$

ここで，回転している棒磁石の強さは $M(p,q)$ である．この棒磁石の回転により電磁波が誘導される．これが場所 (p,q) が発する NMR 信号である．ゆえに，第 k 次の第３期 $b_k \le t \le c_k$ で全体として観測される NMR 信号を $f(t,k)$ とするとき，NMR 信号 $f(t,k)$ は本質的に

$$f(t,k) = \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)\ e^{i(C-\gamma(2G_yL_yT_y/N_y^2)k'q'-(\omega_0+\gamma(G_xL_x/N_x)p')(t-b_k))}$$

で与えられる．ここで，種々の parameters は次の関係を満たすようにとる：

$$\gamma(G_xL_xT_x/N_x) = 2\pi\ ,\quad \gamma(G_yL_yT_y/N_y) = \pi$$

ただし，$T_x = c-b$, $T_y = b-a$) である．
このとき，$b_k \le t \le c_k$, $1 \le k \le N_y$ において，

$$f(t,k) = \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)\ e^{i(C-(2\pi/N_y)k'q'-(\omega_0+\gamma(G_xL_x/N_x)p')(t-b_k))}$$

である．いま，区間 $b_k \le t \le c_k$ を N_x 等分割する．$T_x = c_k - b_k = c - b$ であるから，第 h 分点 $(h = 1, 2, \cdots, N_x)$ は

$$b_k + hT_x/N_x$$

である．第 k 次の第３期の第 h 分点で観測される NMR 信号を $\varphi(h,k)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\varphi(h,k) &= f(b_k + hT_x/N_x, k) \\
&= \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)\ e^{i(C-(2\pi/N_y)k'q'-(\omega_0+\gamma(G_xL_x/N_x)p')hT_x/N_x)} \\
&= \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)\ e^{i(C-\omega_0 hT_x/N_x-(2\pi/N_y)k'q'-(2\pi/N_x)hp')}
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$k'q' = kq - kNy/2 - qN_y/2 + (N_y/2)^2 \ , \quad hp' = hp - hNx/2$$

であり，一方，

$$e^{-2\pi/N_x(N_x/2)} = e^{-\pi} = -1$$

であり，$N_y/2$ は偶数であるから，

$$e^{-i((2\pi/N_y)k'q'+(2\pi/N_x)hp')} = (-1)^{k+h+q} e^{-i((2\pi/N_y)kq+(2\pi/N_x)hp)}$$

ある．いま，ζ_x, ζ_y を次で定める：

$$\zeta_x = e^{2\pi i/N_x} \ , \quad \zeta_y = e^{2\pi i/N_y}$$

このとき，

$$\varphi(h,k) = \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)\ e^{i(C-\omega_0 hT_x/N_x)}\ (-1)^{k+h+q}(\zeta_x)^{-hp}(\zeta_y)^{-kq}$$

であるから，

$$\varphi(h,k)e^{i(-C+\omega_0 hT_x/N_x)}(-1)^{k+h} = \sum_{p=1}^{N_x}\sum_{q=1}^{N_y} M(p,q)(-1)^q(\zeta_x)^{-hp}(\zeta_y)^{-kq}$$

が成り立つ．ゆえに，DFT より，

$$M(p,q) = \frac{(-1)^q}{N_x N_y}\sum_{h=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y}\varphi(h,k)e^{i(-C+\omega_0 hT_x/N_x)}(-1)^{k+h}(\zeta_x)^{hp}(\zeta_y)^{kq}$$

この式より，観測データ $\{\ \varphi(h,k)\ :\ 1 \le h \le N_x,\ 1 \le k \le N_y\ \}$ から場所 (p,q) での水素原子の密度に比例する $M(p,q)$ が求められる．
上の $\{\ \varphi(h,k)\ \}$ から $\{\ M(p,q)\ \}$ を求める作業は N_x, N_y を 2 の累乗にとることにより，コンピュータでは高速フーリエ変換 (FFT) のプログラムを用いて実行される．

A　フーリエ級数とDFT

実数値関数 $f(t)$ は区間 $[0,\ T]$ で定義されていて，次のように Fourier 級数に展開されているとする：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \quad (\ t \in [0,\ T]\ )$$

ここで,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\ dt$$

区間 $[0,\ T]$ を N 等分割し，ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_j) \in \boldsymbol{C}^N$ を次で定義する：$j = 1,\ \cdots,\ N-1,\ N$ に対して,

$$f_j = f\left(\ j\ \frac{T}{N}\ \right)$$

すなわち,

$$\boldsymbol{f} = {}^t(f(\frac{T}{N}),\ f(2\frac{T}{N}),\ \cdots,\ f((N-1)\frac{T}{N}),\ f(N\frac{T}{N})\ )$$

すなわち，ベクトル $\boldsymbol{f}$ は，関数 $f(t)$ の分点 $T/N,\ 2(T/N),\ \cdots,\ N(T/N)$ での N 個の値からなるベクトルである.

次の式で複素数 $\zeta \in \boldsymbol{C}$ を定める：

$$\zeta = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_N \in \boldsymbol{C}^N$ を定める：

$$\boldsymbol{e}_k = {}^t(\zeta^k,\ \zeta^{2k},\ \cdots,\ \zeta^{(N-1)k},\ 1)$$

このとき，ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_N$ は $\boldsymbol{C}^N$ の基底であり，互いに直交する.

ベクトル $\boldsymbol{f}$ をこの基底で表す：

$$\boldsymbol{f} = \sum_{k=1}^{N} C_k\ \boldsymbol{e}_k$$

すなわち,

$$C_k = \frac{1}{N}\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ f_j\ \zeta^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ f\left(\ j\frac{T}{N}\ \right)\ e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}$$

このようにして定まる $\{C_k\}(1 \leq k \leq N)$ を N 次の DFT という.

ここで，$\boldsymbol{C} = {}^t(C_1, \cdots, C_N)$ とするとき，上の式は次のように表される：

$$\boldsymbol{f} = \mathcal{F}_N \boldsymbol{C}$$

すなわち,

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}}_N \boldsymbol{f}$$

である.

さらに，このとき，次が成り立つ：

$$C_k = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{k+pN}$$

実際，

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(j\frac{T}{N}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\,i\frac{2\pi}{T}n(jT/N)}\right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\sum_{j=1}^{N} e^{i\frac{2\pi}{N}(n-k)j}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\sum_{j=1}^{N} \zeta^{(n-k)j}\right) \\
&= \sum_{n:n\equiv k(N)} c_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{k+Np}
\end{aligned}$$

また，関数 $f(t)$ が実数値であれば，次が成り立つ：

$$\overline{C}_{N-k} = C_k$$

実際，

$$\overline{C}_{N-k} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\,\zeta^{(N-k)j} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j\,\zeta^{-kj} = C_k$$

関数 $f(t)$ $(0 \le t \le T)$ のフーリエ係数 $\{c_n\}$ については，多くの場合に，

$$c_n \fallingdotseq 0 \quad (\text{if } n: \text{十分に大})$$

が成り立つ．そのような場合には，N を十分に大きくとり，関数 $f(t)$ の区間 $0 \le t \le T$ での N 個からなる sampling $\boldsymbol{f} = (f_j)$ をとり，その DFT $\{C_k\}$ を求めると，$1 \le k \le N$ に対して，

$$C_k = \begin{cases} c_k & (1 \le k \le N/2) \\ c_{k-N} & (N/2 \le k \le N) \end{cases}$$

と見なすことが出来る．

FFT（高速フーリエ変換）は N が 2 の累乗のときに，N 項ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_j)$ に対してその DFT の像 $\boldsymbol{C} = (C_k)$ を能率よく求めるアルゴリズムである．

Excel の「分析ツール」内の「フーリエ解析」は FFT の計算を手軽に行ってくれる．