変換群論から見たBorsuk-Ulam型定理[1,2]

長崎　生光
京都府立医科大学医学部・数学教室

1　はじめに

現在Borsuk-Ulamの定理と呼ばれている定理は，K. Borsukによると，S. Ulamによって予想されたという．その証明はK. Borsukにより1933年の論文[2]で発表された．この定理は，70年以上も前に発見された定理にもかかわらず，その簡明さと応用の広さから現代においても多くの研究者を魅了し，その現代的な研究が続いている．1次元の場合のBorsuk-Ulamの定理を例を用いて説明すると以下のようになる．

ある時刻における地球の赤道上の気温を考える．赤道上の各地点で気温は異なるが，その変化は位置に関して連続的であると考えられる．この状況のもとで次のことが成り立つ．

「赤道上のある地点とその真反対の地点の気温が同じになる場所がある.」

赤道上の温度分布のあり方は可能性としては無限にあるが，どのような分布であっても上記の主張が成り立つところが一見不思議で，面白いところでもある．

また，3次元のBorsuk-Ulamの定理からは次のような面白い名前のついた定理が導かれる．

定理 1.1 (ハムサンドウィッチの定理). 三段の層からなるサンドウィッチを考える．ナイフを1度だけ用いて，それぞれの層を同じ分量に切り分けることができる．

ナイフの切り口が平面になるように切るが，サンドウィッチの層はきれいに並んでいる必要はなく，どのように重なりあっていてもよい．ハムサンドウィッチの定理も様々なバリエーションがあり，近年その一般化が研究されている（[18]）．この定理で注意すべきことは，ナイフの切り方の存在性のみを主張しており，具

[1]佐野　護教授の定年退職を記念して本稿を捧げます.

[2]この研究は学術振興会・科学研究費補助金基盤研究 (C) の助成を受けています.

体的にどのように切ればよいのかは何も述べていないことである．このような定理は一般に「存在定理」と呼ばれている．Borsuk-Ulam の定理もある性質をもつ点の存在性を主張しており，一つの存在定理である．

Borsuk-Ulam の定理の応用はハムサンドウィッチの定理以外にも，非線形解析や組合せ論などでも数学的な応用が知られている．詳細は [18], [27], [28] などを参照されたい．また，Borsuk-Ulam の定理を一般化することでトポロジーへの応用も可能である．とくに近年急速に発展した 4 次元トポロジーおける古田 [7] の 10/8 定理の証明には Borsuk-Ulam 型定理が重要な役割を果たしている．

本稿では，はじめに 1 次元の場合に Borsuk-Ulam の定理を数学的に述べ，その証明を与える．次に一般次元の Borsuk-Ulam の定理を述べ，さらに変換群論の観点から再検討する．最後に Borsuk-Ulam 型定理および等変 Borsuk-Ulam 型定理の近年の研究成果について紹介する．

2 Borsuk-Ulam の定理 — 1 次元の場合

円周 $S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ を考える．1 次元の Borsuk-Ulam の定理はつぎのように述べられる．

定理 2.1. S^1 上の任意の実連続関数 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ に対して，$f(-x) = f(x)$ となる点 $x \in S^1$ が存在する．

「はじめに」で述べた結果は，S^1 を赤道とし，$f : S^1 \to \mathbb{R}$ は気温を対応させる関数と解釈したものである．そのとき，ある x で $f(-x) = f(x)$ とは，x と真反対の $-x$ で気温が等しいことを意味する．

さて，この定理の証明であるが，1 次元の場合は中間値の定理から容易に証明される．

定理 2.1 の証明．$F : S^1 \to \mathbb{R}$ を $F(x) = f(-x) - f(x)$ で定義する．F は連続であり，任意の $x \in S^1$ に対して $F(-x) = -F(x)$ が成り立つ（つまり F は奇関数）．示すべきことは，F の零点の存在，すなわち $F(x) = 0$ となる点の存在をいえばよい．実際，$F(x) = 0$ ならば，F の定義により，$f(-x) = f(x)$ となる．さて，F が恒等的に 0 ならば示すべきことは何もないので，F は恒等的に 0 でないとする．このとき，ある点 x_0 で $F(x_0) \neq 0$ となるが，F が奇関数であることから，$F(x_0)$

と $F(-x_0)$ は異符号である．つまり，一方が正で他方が負になる．したがって中間値の定理より（S^1 は連結なので）$F(x)=0$ となる点 $x \in S^1$ が存在する． □

上の証明中につぎのことも同時に示されている．

定理 2.2. $f: S^1 \to \mathbb{R}$ を連続な奇関数とする．このとき f は零点をもつ．

上の定理2.1の証明は，中間値の定理から定理2.2を示し，定理2.2から定理2.1を示した格好となっている．実は定理2.1と定理2.2は同値な内容をもつ定理である．実際，定理2.1から定理2.2が次のように導かれる．関数 F について，定理2.1より，$F(-x)=F(x)$ となる点 x が存在するが，F は奇関数より $-F(x)=F(-x)=F(x)$．故に $F(x)=0$ となる．この同値性から定理2.2の形の定理もBorsuk-Ulamの定理と呼ばれる．

3 Borsuk-Ulamの定理 — 一般次元の場合

n 次元球面 S^n を

$$S^n = \{x=(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$$

とおく．

定理2.1の証明と同様に中間値の定理から次のことがわかる．

命題 3.1. 任意の連続関数 $f: S^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ について，$f(-x)=f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する．

一般次元のBorsuk-Ulamの定理はこの命題より強い内容をもつ．

定理 3.2 (Borsuk-Ulamの定理 [2]).

(BU1) 任意の連続写像 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ について，$f(-x)=f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する．

連続写像 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ は n 個の連続関数 $f_i: S^n \to \mathbb{R}$ $(i=1,\dots n)$ を成分にもつ：$f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$．したがってBorsuk-Ulamの定理は n 個の関数について同時に $f_i(-x)=f_i(x)$ が成り立つ点 x の存在を主張している．たとえば，$n=2$ のときには次のように説明できる．

「地球上の各地点での気温と気圧を考える．このとき，ある地点の気温と気圧とその真反対での気温と気圧が互いに等しくなるような地点が存在する.」

Borsuk-Ulam の定理には同値な言い換えが多数知られている．とくに次のことはよく知られている．一般に $f(-x) = -f(x)$ をみたす写像を**奇写像**ということにする．

命題 3.3. 次の 2 つの命題は Borsuk-Ulam の定理 (BU1) と同値である．

(BU2) 連続な奇写像 $f : S^n \to S^{n-1}$ は存在しない．

(BU3) 連続な奇写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ は零点をもつ．

証明. (BU1)⇒(BU2): 奇写像 f が存在するとすると，包含写像 $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ を合成した写像 $g = i \circ f : S^n \to \mathbb{R}^n$ も奇写像であり，(BU1) より $g(x) = g(-x) = -g(x)$ なる $x \in S^n$ が存在する．したがって，$g(x) = 0$．i は包含写像なので $f(x) = 0$ となる．一方 f の値域は 0 を含まないのでこれは矛盾である．

(BU2)⇒(BU3): $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ が零点をもたないとすると，$g(x) = f(x)/\|x\|$ と定義することで連続写像 $g : S^n \to S^{n-1}$ が定義できる．この g は奇写像となるので (BU2) に矛盾する．

(BU3)⇒(BU1): 連続写像 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$F(x) = f(x) - f(-x)$ とおく．F は奇写像となるので，(BU3) より零点 $x \in S^n$ をもち，したがって $f(-x) = f(x)$ となる． □

以上のことから (BU1)～(BU3) はどれも Borsuk-Ulam の定理と呼ばれている．(BU1), (BU3) はいわゆる存在定理であるが，面白いことに (BU2) は「非存在定理」とでもいうべき結果である．また，(BU2) から次のことも容易に示され，これも Borsuk-Ulam の定理と呼ばれている．

定理 3.4. 次の (BU4) は (BU2) と同値である．

(BU4) 連続な奇写像 $f : S^{m-1} \to S^{n-1}$ が存在するならば，$m \leq n$ である．

証明. (BU4) から (BU2) は $m = n + 1$ のときを考えれば明らかである．逆は，$m > n$ とすると，包含写像 $j : S^n \to S^{m-1}$ が定義でき，これは奇写像となる．f と合成すると奇写像 $j \circ f : S^n \to S^{n-1}$ が存在することになるが，これは (BU2) に矛盾する． □

Borsuk-Ulamの定理は非常に簡明な形の定理であるが，2次元以上の場合の証明はそれほど簡単ではない．様々な証明方法が知られているが，代数トポロジーの手法を用いる証明は，コホモロジー論の一つの応用として(BU4)を示すことが多い[20], [19]．また，(コ) ホモロジー論を使わない組合せ論的な証明も知られている[18].

ここでは写像度を用いた証明の概略を述べる.

(BU4)の証明の概略. 次の事実を用いる.

命題 3.5. 連続な奇写像 $h : S^n \to S^n$ の写像度 $\deg h$ は0でない.(実際には奇数になることが知られている.)

もし，$m > n$ とすると，包含写像 $i : S^n \to S^m$ が存在し，f との合成を $h = f \circ i : S^n \to S^n$ とすると h は奇写像である．したがって $\deg h \neq 0$ である．つまりホモロジー群の準同型 $h_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ について $h_* \neq 0$ である．一方，$h_* = f_* \circ i_*$ であるが，$i_* : H_n(S^n) \to H_n(S^m) = 0$ より，$h_* = 0$ であるので矛盾を生ずる．したがって，$m \leq n$ である． □

注意. Borsuk-Ulamの定理は命題3.5とも同値である.

4 Borsuk-Ulam型定理

Borsuk-Ulamの定理は様々な一般化が知られているが，それらは総称としてBorsuk-Ulam型定理と呼ばれている．Borsuk-Ulamの定理(BU2)–(BU4)では奇写像であることが本質的である．このような観点から一般化を考えることは自然であろう．奇写像はある種の対称性をもった写像であると考えられる．この対称性を記述する数学が変換群論である．ここでは，変換群論の観点からBorsuk-Ulamの定理を再定式化し，いくつかのBorsuk-Ulam型定理を述べる．今後，写像は常に連続性を仮定する．はじめに変換群論の用語を復習しておく．

G を位相群とし，X を位相空間とする．写像 $\phi : G \times X \to X$ について $\phi(g, x)$ を $g \cdot x$ (あるいは単に gx) と表す.

定義. ϕ が次の性質をみたすとき，X 上の G **作用**という.

(1) $1 \cdot x = x$ ($\forall x \in X$, 1は G の単位元).

(2) $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$ $(\forall g, h \in G, \forall x \in X)$.

G 作用 ϕ が与えられた位相空間を G **空間**という．

2つの G 空間の間の写像 $f: X \to Y$ が $f(gx) = gf(x)$ $(\forall g \in G, \forall x \in X)$ をみたすとき，f を G **同変写像**（あるいは単に G 写像）と呼ぶ．

H を G の部分郡とする．G 空間 X の H **不動点集合** X^H を

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x\ (\forall h \in H)\}$$

で定義する．

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

は G の部分群になるが，これを x の**イソトロピー群**という．

定義． (1) $G_x = 1$ $(\forall x \in X)$ である G 作用を**自由作用**という．

(2) $X^G = \emptyset$ であるとき，**不動点自由作用**という．

注意．自由作用ならば不動点自由であるが，逆は正しくない．

$\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）上の基本的な群作用は，群の表現から得られる線形作用である．連続準同型 $\rho: G \to O(n)$ (resp. $U(n)$) を群の直交（ユニタリー）表現という．このような表現から $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) 上の G 作用 ϕ が

$$\phi(g, x) = \rho(g)x,\ g \in G,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ (resp. } \mathbb{C}^n)$$

で定義される．このような作用を $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) 上の線形作用といい，線形作用をもつ $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) を V などの記号で表し，この G 空間も G の直交（ユニタリー）表現と呼ぶ．

上記の G 作用は距離を保つので球面 S^{n-1} (resp. S^{2n-1}) 上の作用を誘導する．このようにして得られる作用を球面上の線形作用という．この G 空間を表現 V の表現球面と呼び，SV と表す．

$C_2 = \{\pm 1\}$ を位数2の巡回群とする．C_2 の S^n (or $\mathbb{R}^n$) 上の自由な作用を $(-1)\cdot x = -x$ で定義する（これは対心的作用と呼ばれる）．このとき，奇写像 $f: S^m \to S^n$ は C_2 写像 f といいかえられる．したがって，前節の (BU4) は以下のように述べることができる．

定理 4.1 ((BU4) の変換群論的表現). C_2 写像 $f : S^{m-1} \to S^{n-1}$ が存在するならば，$m \leq n$ である．

この形の Borsuk-Ulam 型定理は数多く知られているが，直接的な一般化として次の結果を述べておく．

定理 4.2 (mod p Borsuk-Ulam 定理). 素数 p の位数をもつ巡回群を C_p で表す．C_p は mod p ホモロジー球面 M, N に自由に作用しているとする．C_p 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明は，[6], [13] などにある．

注意. $p = 2$ のときでも Borsuk-Ulam の定理の拡張になっている．

この定理から次のような Borsuk-Ulam 型定理が容易に示される．

系 4.3. G は非自明な有限群とし，M, N はある素数 $p \mid |G|$ について mod p ホモロジー球面とする．G は M, N に自由に作用とする．このとき，G 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明. $C_p \leq G$ が存在するので作用を C_p に制限し，C_p 作用を考えると，f は C_p 写像と見なされるので，mod p Borsuk-Ulam 定理を用いれば結論の不等式が得られる． □

系 4.4. M, N は有理ホモロジー球面とする．S^1 は M, N になめらかで不動点自由に作用するとする ($M^{S^1} = N^{S^1} = \emptyset$)．このとき，$S^1$ 写像 $f : M \to N$ が存在するならば $\dim M \leq \dim N$ である．

証明. M, N は有限個の軌道型しかもたない ([3], [13]) ので，ある素数位数の巡回群 $C_p \leq S^1$ が存在して，M, N は mod p ホモロジー球面で $M^{C_p} = N^{C_p} = \emptyset$ となることがわかる．したがって作用を C_p に制限すれば自由作用となり mod p Borsuk-Ulam 定理を用いると結論を得る． □

以上の系からも推察できるように，変換群論的観点からの Borsuk-Ulam 型定理とは同変写像が存在するときに成り立つ空間の次元の間の不等式に関する定理と考えられる．

他の一般化については [1], [8], [9], [10], [11], [13], [14], [15], [17] などを見られたい．

5 等変 Borsuk-Ulam 型定理

この節では，等変写像の Borsuk-Ulam 型定理を考察したい．G 空間の間の連続写像 $f: X \to Y$ が G **等変** (*isovariant*) であるとは，f が G 同変であり，$G_{f(x)} = G_x$ $(\forall x \in X)$ が成り立つときをいう．別の述べ方をすると，等変写像とは X の各軌道上では単射となる同変写像のことである．等変写像は G 空間や G 多様体の分類に関して，非常に重要な概念である (cf. [4], [16], [26])．

Borsuk-Ulam 型定理に関しては，同変写像を考えるのみでは，C_{pq} (p, q は異なる素数) といった簡単な群の作用でも，もはや Borsuk-Ulam 型の定理は成り立たないことが知られている．等変写像は，作用する群を大きく一般化した Borsuk-Ulam 型定理を考察するうえで極めて重要な概念である．Borsuk-Ulam の定理の等変版は A. G. Wasserman [29] により最初に研究された．特に次の結果が mod p Borsuk-Ulam 定理の応用として得られる．

定理 5.1 (等変 Borsuk-Ulam 定理)．G はコンパクト可解リー群とする．G 表現 V, W の表現球面の間に G 等変写像 $f: SV \to SW$ が存在するならば不等式

$$\dim SV - \dim SV^G \leq \dim SW - \dim SW^G$$

が成り立つ．

Borsuk-Ulam の定理 (BU4) では，$G = C_2$ は自由に作用しているので，この場合には，同変写像と等変写像は同じ概念となる．したがって等変 Borsuk-Ulam 定理も Borsuk-Ulam の定理の一般化のひとつと考えられる．なお，$SV^G = \emptyset$ のときは $\dim SV^G = -1$ と約束する．

この定理に関連して，非可解なコンパクト・リー群ではどうかという問題があるが，現在までに完全には解決されていない．ただし Wasserman [29] は等変 Borsuk-Ulam 定理が成り立つ非可解群をいくつか見つけている．たとえば，交代群 $A_5, \ldots, A_{11}$ はそのような例である．

また，結論を弱い形に修正した弱等変 Borsuk-Ulam 定理は一般のコンパクト・リー群の線形作用で成り立つ．その定理は次のように述べられる．

定理 5.2 ([21])．任意のコンパクト・リー群 G に対して，無限大に発散する広義単調増加関数 $\varphi_G: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0$ は非負整数の集合) が存在して，次が成り立つ：

等変写像 $f : SV \to SW$ が存在すれば，

$$\varphi_G(\dim SV - \dim SV^G) \leq \dim SW - \dim SW^G$$

である．

注意. $G = SO(3)$ のときは，$\varphi_G(x) = x/2$ ととれることがわかるが，他の群で φ_G の具体的な形はほどんど調べられていない．$\varphi_G(x) = x$ ととれると等変 Borusk-Ulam 定理が成り立つことになる．

以上は線形作用の場合の結果であるが，最後に線形作用とは限らない別の等変 Borsuk-Ulam 型定理を示したい．以後は G は有限群とする．G 空間 X の特異集合 $X^{>1}$ は

$$X^{>1} = \bigcup_{1 \neq H \leq G} X^H$$

で定義される．

定理 5.3. W は G 表現とする．M を G が自由に作用する mod $|G|$ ホモロジー球面とする．等変写像 $f : M \to SW$ が存在するならば Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つ．ここで，$SW^{>1} = \emptyset$ の場合は $\dim SW^{>1} = -1$ と定める．

証明. $\dim SW^H = \dim SW^{>1}$ となる部分群 $H \neq 1$ が存在する．H の素数位数の巡回部分群 C_p を一つとる．f は等変写像なので $f(M) \subset SW \setminus SW^{C_p}$ となる．$(W^{C_p})^\perp$ を W での W^{C_p} の直交補空間とする．このとき $SW \setminus SW^{C_p}$ は $S(W^{C_p})^\perp$ と C_p 同変ホモトピー同値であるので C_p 同変写像 $g : M \to S(W^{C_p})^\perp$ が存在する．mod p Borsuk-Ulam の定理より，

$$\dim M \leq \dim S(W^{C_p})^\perp = \dim SW - \dim SW^{C_p} - 1$$

となり，結論の不等式が得られる．□

6 おわりに

等変 Borsuk-Ulam 型定理に関連した問題を最後に述べておきたい．

6.1 等変 Borsuk-Ulam 型定理の逆

等変 Borsuk-Ulam 型定理の逆は Borsuk-Ulam 型不等式のもとで等変写像が存在するかという問題であり，等変写像の存在性に関わる重要な問題である．一般には難しい問題であるが，たとえば定理 5.3 の逆については次が成り立つ．

定理 6.1 ([24]). Borsuk-Ulam 型不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立つとき，等変写像 $f : M \to SW$ が存在する．

この結果は同変障害理論から示される．

6.2 等変ホモトピー類の分類

等変写像の存在がいえるとき，どのくらい豊富に存在するかという問題も自然な問いであろう．ここでは等変ホモトピー類の分類問題を考えたい．2 つの等変写像の間のホモトピーが等変であるとき，**等変ホモトピー**という．$[X, Y]_G^{\mathrm{isov}}$ で等変写像 $f : X \to Y$ の等変ホモトピー類全体の集合（等変ホモトピー集合）を表す．

一般には，この問題も同変写像の場合と同様に非常に難しい問題である．我々は最近の研究で以下の設定で分類問題を研究し，いくつかの結果を得ている．

- G は有限群．
- $X = M$ は有向連結閉 G-C^{∞} 多様体．
- M 上の G 作用は自由であり, かつ M の向きを保つ．
- $Y = SW$ とする．ただし，W はユニタリー G 表現．
- Borsuk-Ulam 型不等式 $\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1}$ をみたす．

このとき，結果は 2 つの場合に分けられる．

(1) $\dim M + 1 < \dim SW - \dim SW^{>1}$ が成り立つ場合には等変ホモトピー類は一つであることがわかる．

(2) 一方，$\dim M + 1 = \dim SW - \dim SW^{>1}$ のときには無限個の等変ホモトピー類が存在する．これらは我々が新たに導入した多重写像度という等変ホモトピー不変量により判別できる．詳細は [25] で述べる予定である．

参考文献

[1] T. Bartsch, *On the existence of Borsuk-Ulam theorems*, Topology **31** (1992), 533–543.

[2] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre*, Fund. Math, **20** (1933), 177–190.

[3] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972.

[4] W. Browder and F. Quinn, *A surgery theory for G-manifolds and stratified sets*, Manifolds—Tokyo 1973, 27–36, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975.

[5] T. tom Dieck: Transformation groups, Walte de Gruyter & Co, Berlin, New York 1987.

[6] A. Dold, *Simple proofs of some Borsuk-Ulam results*, Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982), 65–69, Contemp. Math., 19.

[7] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8-conjecture*, Math. Res. Lett. 8 (2001), 279–291.

[8] E. Fadell and S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bougin–Yang theorems*, Ergodic Theory Dynamical System **8** (1988), 73–85.

[9] Y. Hara, *The degree of equivariant maps*, Topology Appl. **148** (2005), 113-121.

[10] A. Inoue, *Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 183-191.

[11] J. Jaworowski, *Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **32** (1989), 271-279.

[12] K. Kawakubo: The theory of transformation groups, Oxford University Press 1991.

[13] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a Z_q-map from a Z_q-space to* S^{2n+1}, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 714-716.

[14] K. Komiya, *Equivariant K-theoretic Euler classes and maps of representation spheres*, Osaka J. Math. **38** (2001), 239-249.

[15] E. Laitinen, *Unstable homotopy theory of homotopy representations*, Transformation groups, Poznań 1985, 210–248, Lecture Notes in Math., **1217**, Springer, Berlin, 1986,

[16] W. Lück, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1408, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[17] W. Marzantowicz, *Borsuk-Ulam theorem for any compact Lie group*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **49** (1994),195-208.

[18] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Universitext, Springer, 2003.

[19] J. P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Univ. of Chicago Press, 1999.

[20] 中岡 稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店 1977.

[21] I. Nagasaki, *The weak isovariant Borsuk-Ulam theorem for compact Lie groups*, Arch. Math. **81** (2003), 348-359.

[22] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743-757.

[23] I. Nagasaki, *The converse of isovariant Borsuk-Ulam results for some abelian groups*, Osaka. J. Math. **43** (2006), 689-710.

[24] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n-manifolds to representation spheres*, preprint.

[25] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Classification of isovariant maps from free G-manifolds to representation spheres*, in preparation.

[26] R. S. Palais, *Classification of G-spaces*, Mem. Am. Math. Soc. 36 (1960).

[27] H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*, Topological methods in nonlinear analysis, 166–235, Montreal, 1985.

[28] H. Steinlein, *Spheres and symmetry: Borsuk's antipodal theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 15–33.

[29] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.